



DINAMIKA ROTACIONOG KRETANJA

TRANSLATORNO KRETANJE	ROTACIONO KRETANJE
masa m	moment inercije I
put s	ugaoni pomeraaj θ
brzina v	ugaona brzina ω
ubrzanje a	ugaono ubrzanje α
impuls $K = m \cdot v$	moment impulsa $L = I \cdot \omega$
slia $F = m \cdot a$	moment sile $M = I \cdot \alpha$
rad $A = F \cdot s$	rad $A = M \cdot \theta$
snaga $P = F \cdot v$	snaga $P = M \cdot \omega$
kinetička energija $E_k = mv^2 / 2$	kinetička energija $E_k = I\omega^2 / 2$



ZADATAK 9

Homogeni disk obrće se oko svoje vertikalne ose frekvencijom $\nu = 10$ ob./s. Moment inercije diska je $I = 0.288 \text{ kgm}^2$. Kolikom tangencijalnom silom F treba delovati na obod diska da bi se on zaustavio za $t = 3$ s? Poluprečnik diska je $r = 120$ mm.

Rešenje:

$$\nu = 10 \text{ ob./s}$$

$$I = 0.288 \text{ kgm}^2$$

$$t = 3 \text{ s}$$

$$r = 120 \text{ mm} = 0.12 \text{ m}$$

$$F = ?$$

Moment sile je:

$$M = I\alpha = rF,$$

Odakle je ugaono ubrzanje:

$$\alpha = \frac{rF}{I}.$$

Početna ugaona brzina je:

$$\omega_0 = 2\pi\nu.$$

Pošto se radi o usporenom kretanju:

$$\omega = \omega_0 - \alpha t = 0,$$

odakle je:

$$\alpha = \frac{2\pi\nu}{t}.$$

Konačno se dobija:

$$\frac{rF}{I} = \frac{2\pi\nu}{t}$$

$$F = \frac{2\pi\nu I}{rt} = 50.24 \text{ N}$$

ZADATAK 10

Da bi se disk obrtao na njega treba delovati momentom sile intenziteta $M = 50 \text{ Nm}$. Koliki se rad A uloži za $n = 5$ ob disk?

Rešenje:

$$M = 50 \text{ Nm}$$

$$n = 5 \text{ ob}$$

$$A = ?$$

Uloženi rad je:

$$A = M\theta ,$$

pri čemu jedan obrtaj (jedan krug) ima 2π radijana, pa je ukupni ugao uvrtanja:

$$\theta = 2\pi n ,$$

odakle je:

$$A = 2\pi n M = 1.57 \text{ kJ}$$

ZADATAK 11

Homogena lopta mase $m = 3 \text{ kg}$ kotrlja se po horizontalnoj ravni brzinom $v = 10 \text{ m/s}$. Izračunati energiju lopte. Moment inercije lopte je $I = 2mr^2/5$, gde je r poluprečnik lopte. Trenje zanemariti.

Rešenje:

$$m = 3 \text{ kg}$$

$$v = 10 \text{ m/s}$$

$$I = 2mr^2/5$$

$$E = ?$$

Kinetička energija lopte je:

$$E = E_k + E_{krot} = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}.$$

Pošto je:

$$\omega = \frac{v}{r},$$

zamenom izraza za *moment inercije* dobija se:

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{5} = \frac{7mv^2}{10} = 210 \text{ J}$$

MEHANIKA FLUIDA

MEHANIKA FLUIDA

X STATIKA FLUIDA

- ☐ Sila potiska
- ☐ Arhimedov zakon

X DINAMIKA FLUIDA

- ☐ Jednačina kontinuiteta
- ☐ Bernulijeva jednačina



STATIKA FLUIDA

Potisak je pojava da svako telo prividno gubi na težini kada je uronjeno u neku tečnost ili gas.



F_p zavisi od vrste (**gustine**) sredine u kojoj se telo nalazi i od veličine tela.

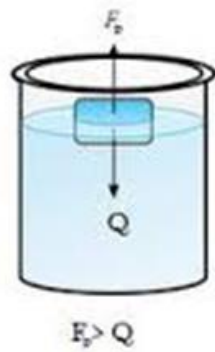
Uvek je **suprotnog smera** od težine tela.

$$F_p = \rho g V$$

ρ - hustina tečnosti;

g – ubrzanje Zemljine teže;

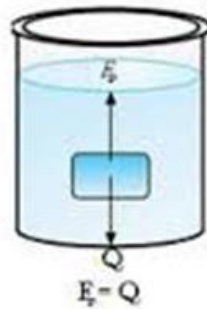
V – zapremina potopljenog dela tela u tečnost



Pliva

$$Q < F_p$$

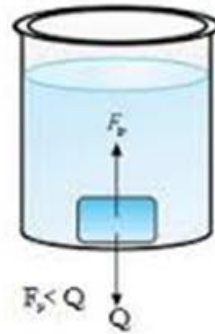
$$\rho_{\text{tela}} < \rho_{\text{tečnosti}}$$



Lebdí

$$Q = F_p$$

$$\rho_{\text{tela}} = \rho_{\text{tečnosti}}$$



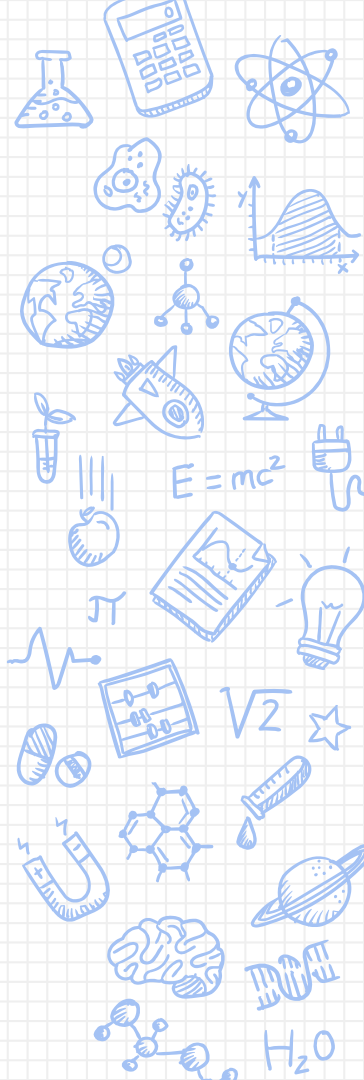
Tone

$$Q > F_p$$

$$\rho_{\text{tela}} > \rho_{\text{tečnosti}}$$

Arhimedov zakon

- X Na svako telo uronjeno u tečnost ili gas deluje sila potiska koja je jednaka težini telom istisnute tečnosti.



ZADATAK 1. U cilindričnom sudu površine dna S nalazi se tečnost gustine ρ . U sud je spušteno telo proizvoljnog oblika mase m , koje ne tone. Odrediti promenu nivoa tečnosti u sudu.

Na telo koje je spuštено u vodu važi Arhimedov zakon. Na osnovu toga se može napisati:

$$\Delta h = ?$$

$$F_p = Q,$$

odnosno,

$$\rho \cdot \Delta V = m \cdot \rho.$$

Kako je

$$\Delta V = S \cdot \Delta h,$$

dobija se

$$\rho \cdot S \cdot \Delta h = m,$$

odakle sledi da je promena nivoa tečnosti jednaka

$$\Delta h = \frac{m}{\rho \cdot S}.$$

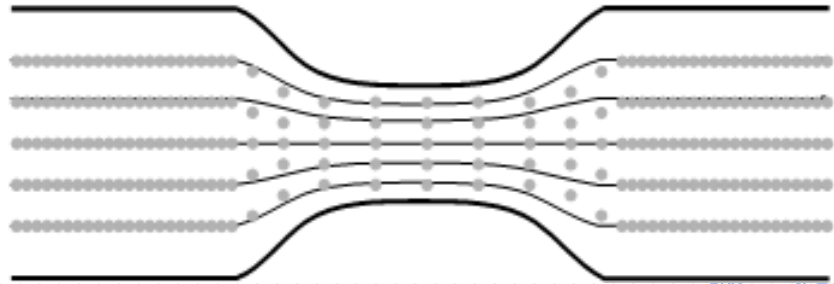
DINAMIKA FLUIDA

Kretanje fluida je znatno komplikovanije od kretanja čvrstog tela.

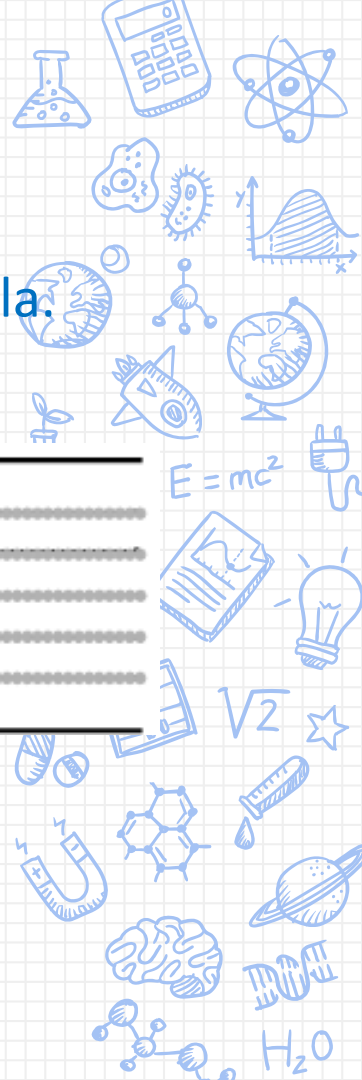
Kretanje fluida se naziva *strujanje fluida* = nastaje zbog težine fluida ili razlike pritiska.

Razmatramo strujanje:

- idealnih fluida,
- konstantne gustine,
- malim brzinama (v manje od 100 m/s)



Kretanje fluida se opisuje kretanjem njegovih čestica.



FLUIDI

Idealni

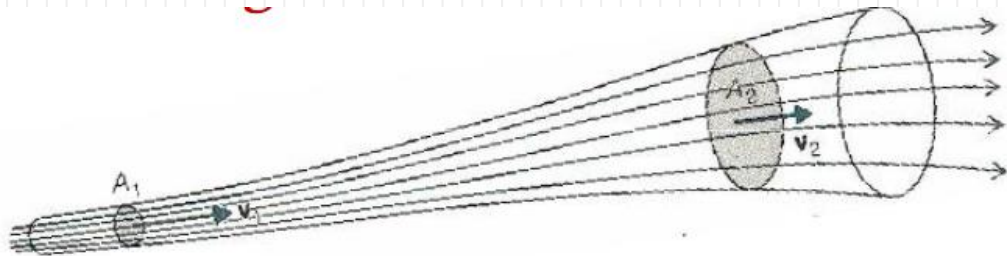
nema unutrašnjeg trenja
Zanemarena viskoznost

Realni

pri kretanju postoji unutrašnje trenje
kao posledica međumolekularnih sila.
Viskoznost uzeta u obzir

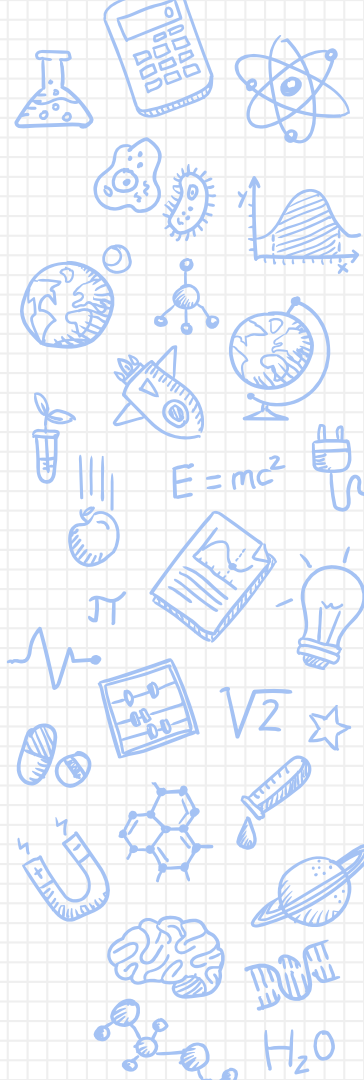
Viskoznost - posledica unutrašnjeg trenja
među česticama fluida

Strujanje idealnog fluida



Strujne linije – *strujnice* su zamišljene linije duž kojih se kreću čestice fluida.

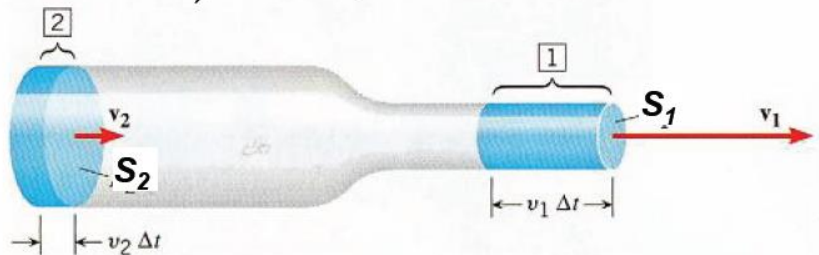
Strujna cev – deo fluida ograničen strujnicama.



$$E = mc^2$$
 $\sqrt{2}$

Jednačina kontinuiteta.

- Zbog osobine nestišljivosti, zapremine proteklog fluida na dva različita preseka strujne cevi su jednake.



$$Q_v = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{S \Delta l}{\Delta t} = \frac{S v \Delta t}{\Delta t} = S v$$

$$Q = [\text{m}^3/\text{s}]$$

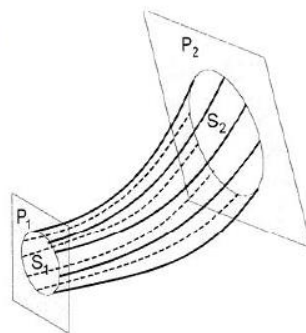
Zapreminski protok
ili jačina strujanja
fluida

$$S v = \text{const.}$$

$$V_1 = S_1 v_1 \Delta t$$

$$V_2 = S_2 v_2 \Delta t$$

$$V_1 = V_2 \Rightarrow S_1 v_1 = S_2 v_2$$



- strujna cijev u kojoj se presek S menja
- brzine v_1 , v_2 stalne

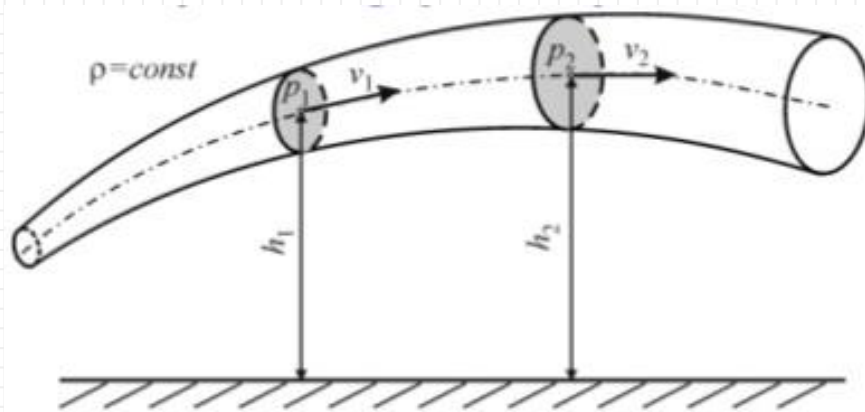
Zapremina valjka

$$\Delta V = S \Delta l$$

brzina $v = \frac{\Delta l}{\Delta t}$

← Jednačina kontinuiteta

Bernulijeva jednačina $p + \rho gh + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const.}$



ZADATAK 2. Kroz poprečni presek vodovodne cevi prečnika 0.8 m protiče voda brzinom $5\frac{\text{m}}{\text{s}}$.
Kolika je zapremina protekle vode za 5 min .

Rešenje:

$$t = 5 \text{ min} = 5 \cdot 60 \text{ s} = 300 \text{ s}$$

$$D = 0.8 \text{ m},$$

$$v = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$t = 5 \text{ min.}$$

$$V = ?$$

Zapremina voda koja će za dati vremenski interval proteći kroz vodovodnu cev izračunava se kao proizvod količine protoka i tog vremenskog interval, ili u matematičkom zapisu

$$V = Q \cdot t,$$

pri čemu se količina protoka izračunava kao proizvod poprečnog preseka cevi i brzine proticanja vode

$$Q = S \cdot v.$$

U ovom slučaju je cev kružnog poprečnog preseka pa je površina jednaka

$$S = \left(\frac{D}{2} \right)^2 \pi.$$

Kada se jednačina za površinu ubaci u jednačinu za količinu protoka dobija se

$$Q = \left(\frac{D}{2} \right)^2 \pi \cdot v,$$

a potom se jednačina za količinu protoka ubaci u jednačinu za zapreminu
dobija se

$$V = \left(\frac{D}{2} \right)^2 \pi \cdot v \cdot t.$$

Iz poslednje jednačine se, zamenom brojnih vrednosti, dobija da je zapremina
protekle vode

$$V = \left(\frac{0.8 \text{ m}}{2} \right)^2 \cdot 3.14 \cdot 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 300 \text{ s} = 753.6 \text{ m}^3.$$

ZADATAK 3. Kroz naftovodnu cev prečnika 0.2 m protiče nafta brzinom $8\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Za koje će vreme kroz taj presek proteći 10000 l nafte?

Rešenje:

$$D = 0.2 \text{ m},$$

$$v = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$V = 10000 \text{ l}$$

$$t = ?$$

$$V = 10000 \text{ l} = 10000 \text{ dm}^3 = 10 \text{ m}^3.$$

Takođe, koristeći istu jednačinu kao u prethodnom zadatku

$$V = \left(\frac{D}{2} \right)^2 \pi \cdot v \cdot t,$$

dobija se da je vreme potrebno da kroz cev protekne navedena zapremina nafte

$$t = \frac{V}{\left(\frac{D}{2} \right)^2 \pi \cdot v} = \frac{10 \cancel{\text{m}^3}}{\left(\frac{0.2 \cancel{\text{m}}}{2} \right)^2 \cdot 3.14 \cdot 8 \frac{\cancel{\text{m}}}{\text{s}}} = 39.8089 \text{ s}.$$

ZADATAK 4. Za vreme 10 s kroz slavinu vodovoda unutrašnjeg prečnika 1.8 cm protekne 0.8 l vode. Odrediti brzinu proticanja vode.

Rešenje:

$$D = 1.8 \text{ cm} = 0.018 \text{ m},$$

$$V = 0.8 \text{ l} = 0.8 \text{ dm}^3 = 8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

$$t = 10 \text{ s},$$

$$D = 1.8 \text{ cm},$$

$$V = 0.8 \text{ l}$$

$$v = ?$$

Zapreminski protok $Q = V/t$, odakle je zapremina

$$V = Q \cdot t,$$

sa druge strane iz jednačine kontinuiteta

$$Q = S \cdot v.$$

U ovom slučaju je cev kružnog poprečnog preseka pa je površina jednaka

$$S = \left(\frac{D}{2} \right)^2 \pi.$$

Kada se jednačina za površinu ubaci u jednačinu za količinu protoka dobija se

$$Q = \left(\frac{D}{2} \right)^2 \pi \cdot v,$$

Zamenom u izraz za zapreminu

$$V = \left(\frac{D}{2}\right)^2 \pi \cdot v \cdot t,$$

Dobija se da je brzina protoka

$$v = \frac{V}{\left(\frac{D}{2}\right)^2 \pi \cdot t} = \frac{8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3}{\left(\frac{0.018 \text{ m}}{2}\right)^2 \cdot 3.14 \cdot 10 \text{ s}} = 0.3145 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

ZADATAK 5. Kroz vodovodnu slavinu unutrašnje površine poprečnog preseka 1.84 cm^2 protiče voda brzinom $0.4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Kolika treba da bude unutrašnja površina poprečnog preseka nastavka cevi koja treba da se montira na kraj slavine da brzina ispuštanja vode bude $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$?

Rešenje:

$$S_1 = 1.84 \text{ cm}^2 = 1.84 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2,$$

$$S_1 = 1.84 \text{ cm}^2,$$

$$v_1 = 0.4 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_2 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$S_2 = ?$$

traženi poprečni presek može se dobiti na osnovu jednačine kontinuiteta

$$Q_1 = Q_2 = \text{const.}$$

Kako je količina protoka jednaka proizvodu poprečnog preseka i brzine protoka dobija se

$$S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2,$$

tako da se površina poprečnog preseka cevi koju treba montirati jednostavno izračunava

$$S_2 = S_1 \cdot \frac{v_1}{v_2} = 1.84 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \frac{0.4 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 0.736 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2.$$

ZADATAK 6. Horizontalni cilindar pumpe ima prečnik 20 cm . U njemu se kreće klip brzinom $1\frac{m}{s}$, i istiskuje vodu kroz otvor prečnika 2 mm . Kolikom brzinom ističe voda iz otvora?

Rešenje:

$$D_1 = 20 \text{ cm},$$

$$v_1 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$\underline{D_2 = 2 \text{ mm}.}$$

$$v_2 = ?$$

$$D_1 = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m},$$

$$D_2 = 2 \text{ mm} = 0.002 \text{ m}.$$

Na osnovu jednačine kontinuiteta

$$Q_1 = Q_2,$$

$$S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2,$$

$$\left(\frac{D_1}{2} \right)^2 \cdot \cancel{\pi} \cdot v_1 = \left(\frac{D_2}{2} \right)^2 \cdot \cancel{\pi} \cdot v_2,$$

$$D_1^2 \cdot v_1 = D_2^2 \cdot v_2.$$

Oдавде se dobija da se brzina kojom voda ističe iz otvora

$$v_2 = v_1 \cdot \frac{D_1^2}{D_2^2} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{(0.2 \text{ m})^2}{(0.002 \text{ m})^2} = 10000 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

ZADATAK 7. Kolika je brzina v isticanja vode kroz bočni otvor koji je za $h = 2\text{ m}$ niži od nivoa vode u sudu? Ako je površina otvora $S = 2\text{ cm}^2$, izračunati zapreminski protok vode. Nivo vode smatrati konstantnim. Ubrzanje Zemljine teže je $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Rešenje:

$$h = 2 \text{ m},$$

$$S = 2 \text{ cm}^2,$$

$$g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$v = ?$$

$$Q = ?$$

$$S = 2 \text{ cm}^2 = 0.0002 \text{ m}^2.$$

Na sud sa otvorom treba primeniti Bernulijevu jednačinu za otvor na površini i bočni otvor

$$p_a + \rho g h_1 + \frac{\rho v_0^2}{2} = p_a + \rho g h_2 + \frac{\rho v^2}{2}.$$

Jasno je da na oba otvora deluje isti atmosferski pritisak tako da se taj član poništava sa obe strane jednačine. Nivo vode se smatra konstantnim tako da je brzina v_0 jednaka nuli.

Tako da Bernulijeva jednačina postaje

$$\rho g h_1 = \rho g h_2 + \frac{\rho v^2}{2}.$$

Odavde se dobija da je brzina isticanja vode jednaka

$$\frac{\rho v^2}{2} = \rho g (h_1 - h_2) = \rho g h,$$

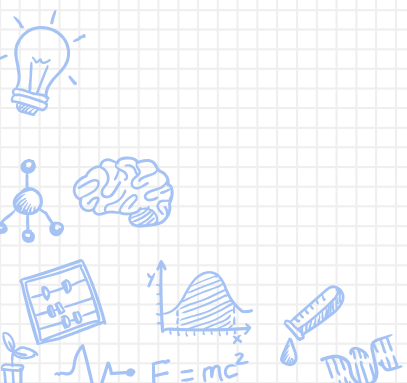
$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 2 m} = 6.2642 \frac{m}{s}.$$

Nakon izračunavanja brzine zapreminski protok se izračunava kao

$$Q = S \cdot v = 0.0002 m^2 \cdot 6.2642 \frac{m}{s} = 0.001253 \frac{m^3}{s}.$$



ZADATAK 8. Kroz širi deo horizontalno postavljene cevi teče voda brzinom $v_1 = 50 \frac{cm}{s}$. Odrediti brzinu proticanja vode v_2 u užem delu cevi, ako je razlika pritisaka između ovih delova cevi $\Delta p = 1330 Pa$. Gustina vode je $\rho = 1 \frac{g}{cm^3}$.



Rešenje:

$$v_1 = 50 \frac{\text{cm}}{\text{s}} = 0.5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \rho = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Bernulijeva jednačina za datu cev je

$$v_1 = 50 \frac{\text{cm}}{\text{s}},$$

$$\Delta p = 1330 \text{ Pa},$$

$$\rho = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

$$v_2 = ?$$

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \rho g h_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}$$

Kako je cev horizontalna $h_1 = h_2$ ova dva člana međusobno poništavaju. Kroz širi deo cevi je brzina manja pa je samim tim pritisak veći. Imajući to u vidu jednačina se može napisati kao

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2),$$

$$2 \cdot \Delta p = \rho (v_2^2 - v_1^2).$$

Odavde se dobija da se brzina u užem delu cevi

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p}{\rho} + v_1^2} = 1.7058 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

ZADATAK 9. Kroz horizontalnu cev prečnika $d_1 = 4 \text{ cm}$, koja je na jednom kraju sužena tako da joj prečnik iznosi $d_2 = 2 \text{ cm}$, protiče voda. Odrediti brzinu proticanja i pritisak vode u proširenom delu cevi, ako je brzina proticanja vode kroz suženi deo cevi $v_2 = 11 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, a pritisak

$$p_2 = 10^5 \text{ Pa. Gustina vode je } \rho = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

Rešenje:

$$d_1 = 4 \text{ cm} = 0.04 \text{ m},$$

$$d_2 = 2 \text{ cm} = 0.02 \text{ m}$$

$$d_1 = 4 \text{ cm},$$

$$d_2 = 2 \text{ cm},$$

$$v_2 = 11 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$p_2 = 10^5 \text{ Pa},$$

$$\rho = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$v_1 = ?,$$

$$p_1 = ?$$

Jednačina kontinuiteta za datu cev je

$$Q_1 = Q_2,$$

$$S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2,$$

$$\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 \cdot v_1 = \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 \cdot v_2,$$

$$\frac{d_1^2}{4} \cdot v_1 = \frac{d_2^2}{4} \cdot v_2,$$

Pa se za brzinu proticanja u širem delu cevi dobija

$$v_1 = v_2 \cdot \frac{d_2^2}{d_1^2} = 11 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{(0.04 \text{ m})^2}{(0.02 \text{ m})^2} = 44 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Bernulijeva jednačina za datu cev je

$$p_1 + \cancel{\rho g h_1} + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \cancel{\rho g h_2} + \frac{\rho v_2^2}{2} \text{ (horizontalna cev pa je } h_1 = h_2 \text{)}$$

Odavde se može izračunati pritisak u širem delu cevi

$$p_1 = p_2 - \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2) = 10^5 \text{ Pa} - \frac{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}{2} \left(44 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 11 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) = 83.5 \text{ kPa}.$$